EPF

3bis, Rue Lakanal
92330 SCEAUX
(1)4660 33 31

CONCOURS D'ENTREE DU 21 MAI 1986

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE 4 Heures CŒFFICIENT 5

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Les coordonnées dans ce repère d'un point mobile M sont données en fonction du temps t par :

$$\begin{cases} x = e^{\frac{1}{t}} \\ y = te^{\frac{1}{t}} \end{cases} \quad \text{où } t \in \ ]0, +\infty[$$

(e désigne la base du logarithme népérien)

1°) Etudier les variations de x et y en fonction de t.

2°) Déterminer une équation cartésienne de la trajectoire (T) du point M et tracer (T).

3°) a. Déterminer à chaque instant t, le vecteur accélération de M.

b. Soit P, la fonction polynômiale définie par

$P(t) = t^3 - t^2 - 2t - 1$. Etudier les variations de P sur $\mathbb{R}$ et démontrer qu'il existe un unique réel α tel que $P(\alpha) = 0$.
Démontrer que $2{,}1 < \alpha < 2{,}2$.

c. Décrire le mouvement de M sur (T) en précisant s'il est accéléré ou retardé.

Exercice 2

On définit sur $\mathbb{R}$ une fonction numérique f par

$f(x) = -e^{1/x}$ si $x \in \ ]-\infty, 0[$

$f(0) = 0$

$f(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ si $x \in \ ]0, +\infty[$

(ln désigne la fonction logarithme népérien de base e)

1°) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$

2°) Faire l'étude de f

lorsque $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on pourra montrer que $f'(x) = 2x\varphi(x)$ avec

$$\varphi(x) = \ln\frac{x+1}{x} - \frac{1}{2(x+1)}$$

et que $\varphi(x)$ garde un signe constant.

3°) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I que l'on précisera. On appelle g l'application réciproque de f, étudier la continuité et la dérivabilité de g sur I.

4°) Montrer que la courbe représentative C de f admet deux asymptotes dont l'une a pour équation $y = x - \frac{1}{2}$. (On pourra utiliser le résultat suivant : si u est voisin de 0,

$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + u^2\varepsilon(u)$ avec $\lim_{u \to 0} \varepsilon(u) = 0$

Tracer la courbe représentative C de f et la courbe représentative Γ de g dans le même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2 cm)

Exercice 3

Trois nombres complexes z_1, z_2, z_3 ont pour produit $4(\sqrt{2} - i\sqrt{2})$. Leurs arguments respectifs θ_1, θ_2 et θ_3 forment une suite arithmétique de raison $\frac{\pi}{3}$ et leurs modules respectifs forment une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$. Sachant que $\theta_1 \in \ ]0, 2\frac{\pi}{3}[$, déterminer z_1, z_2, z_3 et construire les images de ces trois nombres dans un plan complexe muni d'un repère orthonormé direct.

TSVP

PROBLEME

Partie A

Soit f, la fonction numérique d'une variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{1}{1 + \sin x}$

1°) Etudier les variations de f. Tracer sa représentation graphique $(\mathcal{C})$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2 cm). La courbe $(\mathcal{C})$ admet-elle des axes de symétrie ?
Soit A, le point de coordonnées $(\frac{\pi}{2}, 0)$.

Déterminer une équation de $(\mathcal{C})$ dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$.

2°) Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cos t} \, dt$

En déduire l'aire de la région du plan limitée par $(\mathcal{C})$, l'axe $(O, \vec{i})$ et les droites d'équations $x = 0$, $x = \pi$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie B

Soit l'intervalle de $\mathbb{R}$, $J = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$

Soit g, l'application numérique définie sur J par :

$$g(x) = \frac{x}{1 + \sin x}$$

1°) Etudier la dérivabilité de g et calculer g'(x) pour tout $x \in J$.

2°) Soit h, la fonction numérique définie par :

$$h(x) = 1 + \sin x - x \cos x$$

Etudier les variations de h sur J. Démontrer que h est strictement positive sur J; en déduire les variations de g sur J.

3°) Démontrer que g est une application bijective. On appelle g^{-1}, son application réciproque.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on nomme (Γ), (Γ') les représentations graphiques respectives de g et g^{-1}, et (D), la droite d'équation $x = y$

Etudier la position relative de (D) et (Γ)
Sur un même dessin (unité 2 cm), tracer les courbes (Γ), (Γ') et (D)

4°) soit $A = \int_0^{\pi} \frac{x}{1 + \sin x} \, dx$

a. Justifier l'existence de A et, en effectuant le changement de variable $t = \pi - x$, déterminer une relation entre les intégrales A et I (partie A 2°). Calculer A.

b. Déterminer l'aire de la région du plan limitée par les courbes (Γ) et (Γ').

En donner une valeur approchée décimale.

Partie C

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = g^{-1}(u_n) \end{cases}$$

où g^{-1} est la fonction réciproque de g définie dans la partie B.

1°) On suppose $u_0 = \frac{\pi}{2}$

Démontrer que la suite (u_n) est croissante et majorée par π
Etudier sa convergence.

2°) Démontrer que, quel que soit u_0, la suite (u_n) est convergente et indiquer, suivant les valeurs de u_0, la valeur de sa limite.